

ISBN: 978-6029250-35-0



pembicara utama:
Prof. Dr. Ipung Yuwono, M.Sc., M.Si.
Dr. H. Supratman, M.Pd.

PROSIDING

SEMINAR NASIONAL

DENDIDIKAN MATEMATIKA

UNIVERSITAS SILIWANGI

Tasikmalaya, 3 Desember 2016

Peningkatan Kualitas Pembelajaran Matematika
Melalui Implementasi Hasil Penelitian

Diselenggarakan oleh:
Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Siliwangi

ISBN: 978-6029250-35-0

**PENINGKATAN
KUALITAS PEMBELAJARAN MATEMATIKA
MELALUI IMPLEMENTASI HASIL PENELITIAN**

Prosiding Seminar Nasional
Pendidikan Matematika
Universitas Siliwangi

Tasikmalaya, 3 Desember 2016

Tim Editor:

Ebih AR Arhasy
Nani Ratnaningsih
Supratman
Redi Hermanto



FKIP Universitas Siliwangi

PENINGKATAN KUALITAS PEMBELAJARAN MATEMATIKA MELALUI IMPLEMENTASI HASIL PENELITIAN
Prosiding Seminar Nasional Pendidikan Matematika Universitas Siliwangi
Tasikmalaya, 3 Desember 2016

ISBN : 978-6029250-35-0

Tim Editor : Ebih AR Arhasy
Nani Ratnaningsih
Supratman
Redi Hermanto

Tata Letak : Satya Santika

Desain Sampul : Satya Santika

Penerbit : FKIP Universitas Siliwangi

Alamat Penerbit : Jalan Siliwnagi No. 24 Kotak Pos 164 Telp (0265) 323532
Tasikmalaya-46115 email: fkippress.unsil@gmail.com

Hak Cipta dilindungi undang-undang
dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk apapun dan dengan cara apapun
tanpa ijin tertulis dari penerbit

Kata Pengantar

Puji syukur tercurahkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya sehingga Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Siliwangi dapat menyelenggarakan kegiatan Seminar Nasional Pendidikan Matematika yang bertema “Peningkatan Kualitas Pembelajaran Matematika melalui Implementasi Hasil Penelitian”.

Secara umum kegiatan Seminar Nasional Pendidikan Matematika bertujuan untuk (1) Memberikan pengetahuan, motivasi, dan bimbingan kepada guru matematika untuk melaksanakan penelitian; (2) Memberikan arahan kepada guru untuk mengimplementasikan hasil penelitian sebagai upaya dalam meningkatkan kualitas pembelajaran; dan (3) Memfasilitasi guru untuk mempublikasikan hasil Penelitian guru pada jurnal pendidikan matematika..

Sejalan dengan kegiatan yang telah kami laksanakan, kami mengucapkan Terimakasih kepada Prof. Dr. Ipung Yuwono, M.Sc. dan Dr. H. Supratman, M.Pd., selaku pembicara utama dalam kegiatan seminar ini, Rektor Universitas Siliwangi, Dekan FKIP Universitas Siliwangi, Ketua Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Siliwangi, jajaran panitia, pemakalah pada diskusi paralel, peserta seminar dan pihak lainnya yang telah berpartisipasi, membantu serta mendukung terselenggaranya kegiatan ini.

Semoga Kegiatan Seminar Nasional Pendidikan Matematika ini dapat memberikan manfaat serta memberikan kontribusi positif dalam perkembangan pendidikan matematika dimasa mendatang. Aamiin.

Tasikmalaya, Desember 2016
Panitia

Daftar Isi

PENGANTAR DEKAN

Pemaduan Kompetensi Profesional dan Kompetensi Pedagogi dalam Kurikulum Pendidikan Matematika Ipung Yuwono	1
Kontribusi Penelitian Pendidikan Matematika dalam Meningkatkan Pengajaran dan Kesejahteraan Dosen Supratman	7
Implementasi Model Pembelajaran Berbasis Masalah Untuk Meningkatkan Kemampuan Berpikir Kritis Matematik Siswa SMA di Kota Tasikmalaya Yoni Sunaryo	13
Model Desain Didaktis pada Pembelajaran Matematika dan Pemecahan Masalah Siswa Ida Nuraida	23
Pendekatan Laplace dalam Penaksiran Bayesian Perbandingan MCMC dengan INLA I Gede Nyoman Mindra Jaya¹, Zulhanif², Bertho Tantular³	31
Perbandingan Kemampuan Pemecahan Masalah Matematik Antara Siswa yang Mendapatkan Model Pembelajaran CORE (<i>Connecting, Organizing, Reflecting, Extending</i>) dengan Model Pembelajaran CMT (<i>Connected Mathematics Task</i>) Irena Puji Luritawaty¹, Resi Gustiyani Rahmawati²	39
Aplikasi <i>Naïve Bayes Calssifier</i> dalam Menentukan Peluang Kemenangan Pemain dalam Suatu <i>Pertandingan (Study Kasus: Game Age Of Empire 2)</i> Zulhanif¹, Bertho Tantular², Gungum Darmawan³, I.G Mindra Jaya⁴ Neneng Sunengsih⁵	47
Kontribusi Kemampuan Pemahaman Matematik terhadap Hasil Belajar Teori Peluang Menggunakan Pembelajaran Elaborasi Sri Tirto Madawistama¹, AA.Gde. Somatanaya²	51
Penggunaan Metode <i>Restricted Maximum Likelihood</i> dalam Penaksiran Parameter Model Linier Hierarki Bertho Tantular¹, Zulhanif², I Gede Nyoman Mindra Jaya³, Gungum Darmawan⁴	61
Peningkatan Kemampuan Berpikir Kreatif Matematik Peserta Didik Melalui Model <i>Probing-Prompting Learning</i> (Penelitian di Kelas VIII MTs Ash-Shiddiqin Cikoneng Ciamis) Nunu Husnul Wafa¹, Depi Setialesmana²	71
Menentukan Tingkat Kerugian pada Jaringan Jackson dengan Enam Workstation Akibat Fasilitas yang Mengganggu Sudartianto¹, Gungum Darmawan², Budhi Handoko³	79
<i>Pedagogical Content Knowledge (PCK): Sebuah Kerangka Pengetahuan Bagi Guru Profesional</i> Dedi Muhtadi	87

Pengaruh Keaktifan Berorganisasi dan Gaya Belajar terhadap Indeks Prestasi Kumulatif Mahasiswa Linda Herawati¹⁾; Vepi Apiati²⁾	93
Upaya Meningkatkan Hasil Belajar Volume Bangun Ruang Sisi Lengkung dengan Menggunakan Model Pembelajaran Kontekstual Dudu Dumadi	101
Etnomatematika Masyarakat Kampung Adat Kuta (Studi terhadap Aktivitas Bepergian Masyarakat Kampung Adat Kuta) Siska Ryane Muslim¹⁾, Mega Nur Prabawati²⁾	109
Kontribusi Motivasi Berdasarkan Latar Belakang Sekolah terhadap Prestasi Belajar Mahasiswa Witri Nur Anisa	114
Kemampuan Literasi Matematik Siswa Sekolah Menengah Pertama di Kota Tasikmalaya Mega Nur Prabawati	122
Pengaruh Sikap Siswa Mengenai Model Pembelajaran <i>Mind Mapping</i> terhadap Kemampuan Komunikasi Matematis (Studi Penelitian Kuasi Eksperimen di SMP Negeri 6 Garut) Nitta Puspitasari	128
Analisis Pemecahan Masalah Mahasiswa Melalui Teknik Konjekturing dengan Bantuan Geometers' Sketchpad Dan Geogebra: Mencari Lintasan Terpendek Ipah Muzdalipah¹⁾, Eko Yulianto²⁾	140
Nilai Karakter dan Tinjauan Etnomatematika pada Budaya "Nyambungan" Masyarakat Dayeuhluhur Eko Yulianto¹⁾, Cucu Arumsari²⁾	150
<i>Didactical Design Research</i> Konsep Luas dan Keliling Jajargenjang pada Pembelajaran Matematika SMP Ani Nuriyani¹⁾, Nani Ratnaningsih²⁾	162
Keserupaan Pembelajaran Matematika Realistik dengan Pembelajaran Matematika Kontekstual Beni Yusepa, G.P.	172
Binary Time Series Septiadi Padmadisastra¹⁾, Gungum Dharmawan²⁾	183
Pengaruh Kemampuan Koneksi dan Komunikasi Matematik terhadap Kemandirian Belajar Matematika Mahasiswa Depi Setialesmana¹⁾, Yeni Heryani²⁾	188
Pengaruh Penggunaan Model Pembelajaran Matematika Realistik terhadap Kemampuan Pemecahan Masalah Matematik Peserta Didik (Penelitian terhadap Peserta Didik Kelas VII SMP Negeri 1 Cihaurbeuti Ciamis) Edi Hidayat¹⁾, Dea Durrotul Fuadah²⁾	195

PENGGUNAAN METODE *RESTRICTED MAXIMUM LIKELIHOOD* DALAM PENAKSIRAN PARAMETER MODEL LINIER HIERARKI

Bertho Tantular, Zulhanif, I Gede Nyoman Mindra Jaya, Gungum Darmawan
Departemen Statistika FMIPA Universitas Padjadjaran
e-mail : bertho@unpad.ac.id

Abstrak

Dalam pemodelan untuk data hirarki salah satu model yang digunakan yaitu model linier hierarki. Model ini sring disebut sebagai model multilevel. Model yang paling sederhana untuk data hierarki adalah intersep acak. Penaksiran untuk model intersep acak tidak dapat menggunakan metode kuadrat terkecil biasa. Pendekatan yang dapat digunakan adalah metode *Generalized Least Square* (GLS) yang memerlukan prosedur iteratif dalam penaksirannya. Akan tetapi menurut Goldstein (1995) GLS menghasilkan penaksir yang bias terutama pada ukuran sampel kecil. Untuk mengatasi hal tersebut dapat digunakan metode *restricted maximum likelihood* (ReML). Metode ini diterapkan pada contoh kasus faktor-faktor yang memengaruhi lamanya pendidikan seorang anak.

Kata-kata kunci: Model Linier Hierarki, Intersep Acak, ReML.

1. Latar Belakang Masalah

Data hierarki umumnya diperoleh melalui survei yang menggunakan desain *multistage sampling* dari suatu populasi yang berjenjang. Pada struktur data hierarki variabel-variabel dapat didefinisikan dari setiap jenjang (level). Untuk menganalisis data hierarki dapat digunakan model linier hierarki (*hierarchical linear model/HLM*) atau biasa disebut model multilevel. (Goldstein, 1995). Dalam model multilevel, pendefinisian model didefinisikan di setiap level. Sehingga dalam penaksiran parameternya akan melibatkan parameter-parameter yang terkandung dalam setiap level yang berbeda-beda.

Beberapa peneliti telah mengusulkan metode-metode yang berbeda untuk menaksir parameter dalam model regresi multilevel. Metode Kuadrat Terkecil atau *Ordinary Least Square* (OLS) merupakan metode klasik dalam menaksir parameter tanpa menggunakan asumsi distribusi. Metode *Generalised Least Square* merupakan metode yang dapat digunakan untuk menaksir parameter model multilevel (Longford, 1987) akan tetapi metode ini memerlukan prosedur iterative karena masih adanya parameter yang terkandung dalam taksiran parameternya. Metodenya disebut sebagai *Iteratively Generalised Least Square* (IGLS) (Goldstein, 1995).

Menurut Goldstein (1995) metode IGLS menghasilkan penaksiran parameter yang bias sehingga dia mengusulkan metode lain yang melibatkan asumsi distribusi pada model multilevel yaitu metode kemungkinan maksimum (*maximum likelihood*) yang disebut *Restricted Maximum Likelihood* (REML) (Goldstein, 1995).

Pada tulisan ini akan dipaparkan secara rinci metode ReML untuk menaksir parameter model linier hierarki atau biasa disebut model multilevel. Kemudian metode ini diterapkan pada

contoh kasus yaitu data mengenai faktor yang memengaruhi lamanya pendidikan seorang anak.

2. Model Linier Hierarki

Secara umum model linier hierarki (*multilevel model*) mempunyai struktur data hierarki yaitu sebuah variabel respon (*response variable*) yang diukur pada level terendah dan beberapa variabel penjelas (*explanatory variable*) diukur pada setiap level. Model regresi multilevel yang paling sederhana hanya terdiri dari dua level. Dalam model ini variabel respon diukur di level 1 dan variabel penjelas diukur di level 1 dan level 2. Model multilevel secara umum adalah model regresi dua level dengan satu variabel penjelas level 1 sebagai berikut:

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + e_{ij} \quad (1)$$

i menyatakan individu dalam kelompok ke- j ($i = 1, 2, \dots, n_j$)

j menyatakan Kelompok ($j = 1, 2, \dots, J$)

Pada regresi biasa *intersep* dan *slope* untuk setiap kelompok adalah sama nilainya, sedangkan pada model ini *intersep* dan *slope* untuk setiap kelompok berbeda. Asumsi yang mendasari model regresi multilevel (Persamaan 1) pada umumnya sama dengan regresi linier biasa yaitu e_{ij} berdistribusi normal dengan rata-rata nol dan varians $\sigma^2_{e_{ij}}$. Hal ini menunjukkan bahwa varians tiap kelompok berbeda. Tetapi untuk beberapa kasus ada kalanya varians tiap kelompok dianggap sama (Hox, 2002).

Pada Persamaan 1 nilai β_{0j} dan β_{1j} dapat diperoleh dengan menganggap β_{0j} dan β_{1j} sebagai respon dari persamaan-persamaan berikut:

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{10}Z_j + u_{0j} \quad (2)$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{01} + \gamma_{11}Z_j + u_{1j} \quad (3)$$

Dalam hal ini Z_j adalah variabel penjelas level 2 dan u_{0j} dan u_{1j} adalah galat pada level 2. Dari Persamaan 2 terlihat bahwa nilai y secara umum dapat diprediksi oleh Z_j . Dari Persamaan 3 juga dapat diketahui bahwa hubungan fungsional antara y dengan X bergantung pada nilai Z_j .

Bila Persamaan 2 dan Persamaan 3 disubstitusikan ke Persamaan 1 maka akan menjadi:

$$y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}Z_j + \gamma_{01}X_{ij} + \gamma_{11}X_{ij}Z_j + (u_{0j} + u_{1j}X_{ij} + e_{ij}) \quad (4)$$

Dalam Persamaan 4 pada ruas kanan bagian yang tidak berada dalam kurung merupakan bagian tetap (*fixed part*) atau biasa disebut *fixed effect* sedangkan bagian yang berada didalam kurung disebut bagian acak (*random part*) atau biasa disebut *random effect*.

Model 4 dapat disederhanakan menjadi model berikut ini

$$y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}Z_j + \gamma_{01}X_{ij} + \gamma_{11}X_{ij}Z_j + \delta_{ij} \quad (5)$$

dengan $\delta_{ij} = (u_{0j} + u_{1j}X_{ij} + e_{ij})$ atau disebut sebagai galat total.

Model 5 terlihat seperti model regresi biasa tetapi bila melihat pada galatnya terdiri atas tiga komponen yaitu u_{0j} , u_{1j} dan e_{ij} . Asumsi yang mendasari model seperti ini adalah

1. $E(u_{0j}) = E(u_{1j}) = E(e_{ij}) = 0$
2. $V(u_{0j}) = \sigma^2_{u_0}$, $V(u_{1j}) = \sigma^2_{u_1}$, $V(e_{ij}) = \sigma^2_e$
3. $Cov(u_{0j}, e_{ij}) = Cov(u_{1j}, e_{ij}) = Cov(e_{ij}, e_{kl}) = 0$
4. $Cov(u_{0j}, u_{1j}) = \sigma_{u_0u_1}$

Parameter-parameter γ_{00} , γ_{10} , γ_{01} dan γ_{11} pada Persamaan 5 disebut sebagai parameter tetap (*fixed*

parameter) sedangkan σ^2_{u0} , σ^2_{u1} , σ_{u01} dan σ^2_e disebut sebagai parameter acak (*random parameter*).

Berdasarkan asumsi tersebut dapat dihitung varians untuk galat total δ_{ij} adalah

$$V(\delta_{ij}) = \sigma^2_{u0} + 2X_{ij}\sigma_{u01} + X^2_{ij}\sigma^2_{u1} + \sigma^2_e \quad (6)$$

Terlihat pada Persamaan 6 bahwa galat total δ_{ij} heteroskedastik, seperti telah dijelaskan pada bagian sebelumnya, karena merupakan fungsi dari variabel penjelas Level-1, meskipun masing-masing komponennya yaitu u_{0j} , u_{1j} dan e_{ij} homoskedastik. Galat total δ_{ij} akan homoskedastik apabila model tidak mengasumsikan komponen koefisien kemiringan acak. (Jones and Steenbergen, 1997)

3. Metode Penaksiran Parameter

Longford (1987) mengusulkan menggunakan metode kuadrat terkecil umum (*Generalised Least Square*) untuk menaksir parameter tetap pada model multilevel. Metode ini dinilai lebih baik dari metode OLS karena model yang digunakan merupakan model yang telah disubstitusikan sehingga struktur varians-kovarians yang digunakan terdiri dari komponen Level 1 dan Level 2. Model yang digunakan (Persamaan 4) apabila ditulis dalam notasi matriks adalah sebagai berikut

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{E} \quad (7)$$

dengan $\mathbf{E} = \mathbf{Z}\mathbf{e}$, dalam hal ini varians galat adalah $V(\mathbf{E}) = \mathbf{V}$. Dengan demikian penaksir *Generalized Least Square* diperoleh dengan meminimumkan fungsi persamaan linier berikut ini

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{E} &= (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \\ &= \mathbf{y}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y} - \mathbf{y}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \end{aligned}$$

sehingga dapat dengan mudah diperoleh penaksir parameternya sebagai berikut

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y} \quad (8)$$

Penaksir pada Persamaan 8 ini masih mengandung unsur parameter yang nilainya tidak diketahui yaitu pada matriks \mathbf{V} yang merupakan matriks *block diagonal* dari parameter acak σ^2_{u0} , σ^2_{u1} dan σ^2_e . Sehingga untuk mendapatkan nilai taksiran ini harus melalui proses iterasi. Sehingga metode penaksirannya disebut sebagai *Iterative Generalised Least Square* (IGLS). Penaksir IGLS secara umum menghasilkan penaksir yang bias terutama pada saat ukuran sampel kecil (Goldstein, 1995).

Selain metode kuadrat terkecil metode penaksiran parameter dalam model linier yang juga populer adalah metode kemungkinan maksimum (*Maximum Likelihood Estimation*). Prinsip dasar metode ini adalah memaksimalkan fungsi kemungkinan sehingga metode ini membutuhkan asumsi normalitas. Misalkan untuk model pada Persamaan 7 kita buat dua set parameter yaitu $\boldsymbol{\beta} = (\gamma_{00}, \gamma_{01}, \gamma_{10}, \gamma_{11})$ merupakan set parameter pada bagian tetap dan $\boldsymbol{\theta} = (\sigma^2_{u0}, \sigma^2_{u1}, \sigma_{u01}, \sigma^2_e)$ adalah set parameter dalam bagian acak. Penaksiran parameter untuk model linier campuran dapat menggunakan metode kemungkinan maksimum. Apabila diasumsikan bahwa galat mengikuti Distribusi Normal dengan vektor rata-rata nol dan matriks varians-kovarians adalah \mathbf{V} maka secara umum fungsi kemungkinan untuk Model multilevel adalah sebagai berikut (dalam notasi matriks)

$$L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}) = \prod (2\pi)^{-\frac{n_j}{2}} / |\mathbf{V}_j|^{-\frac{1}{2}} \exp -0.5 \sum (\mathbf{Y}_j - \mathbf{X}_j\boldsymbol{\beta})' \mathbf{V}_j^{-1} (\mathbf{Y}_j - \mathbf{X}_j\boldsymbol{\beta}) \quad (9)$$

dan fungsi log-likelihood dari persamaan diatas adalah sebagai berikut

$$l(\beta, \theta) = \ln(\beta, \theta) = -0.5 n \cdot \ln 2 \pi - 0.5 \ln |\mathbf{V}_j| - 0.5 \sum (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}_j \beta_j)' \mathbf{V}_j^{-1} (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}_j \beta_j) \quad (10)$$

dalam hal ini \mathbf{V}_j merupakan fungsi dari θ yaitu vektor parameter acak seperti pada Persamaan 10. Dengan fungsi kemungkinan ini diperoleh penaksir koefisien regresi adalah sebagai berikut

$$\hat{\beta} = \left(\sum_j \mathbf{X}_j' \mathbf{V}_j^{-1} \mathbf{X}_j \right)^{-1} \sum_j \mathbf{X}_j' \mathbf{V}_j^{-1} \mathbf{y}_j \quad (11)$$

dengan galat baku adalah akar diagonal utama matriks

$$\text{var}(\hat{\beta}) = \left(\sum_j \mathbf{X}_j' \mathbf{V}_j^{-1} \mathbf{X}_j \right)^{-1} \quad (12)$$

West, et. al. (2007)

Persamaan 11 dan Persamaan 12 masih mengandung matriks \mathbf{V}_j yang belum diketahui nilainya karena elemen matriks \mathbf{V}_j adalah parameter-parameter acak yang nilainya belum diketahui. Sehingga untuk mendapatkan nilai \mathbf{V}_j perlu dibentuk fungsi *profile log-likelihood* ($l_{ML}(\theta)$), yaitu dengan mengganti nilai β dengan penaksirnya yang diperoleh dari Persamaan 11 untuk nilai \mathbf{V}_j yang telah ditentukan terlebih dahulu (biasanya nilai awal untuk \mathbf{V}_j adalah matriks identitas \mathbf{I} sehingga penaksir Persamaan 11 merupakan penaksir Metode Kuadrat Terkecil Biasa). Fungsi *profile log-likelihood* untuk model ini adalah sebagai berikut

$$l_{ML}(\beta, \theta) = -0.5 n \cdot \ln 2 \pi - 0.5 \ln |\mathbf{V}_j| - 0.5 \sum (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}_j \hat{\beta}_j)' \mathbf{V}_j^{-1} (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}_j \hat{\beta}_j) \quad (13)$$

sehingga penaksir \mathbf{V}_j didapat dari Persamaan 13 dengan mengganti θ dengan penaksirnya kemudian nilai penaksir \mathbf{V}_j ini digunakan untuk menaksir nilai koefisien regresi dengan mengganti \mathbf{V}_j pada Persamaan 11 dengan penaksirnya

$$\hat{\beta} = \left(\sum_j \mathbf{X}_j' \hat{\mathbf{V}}_j^{-1} \mathbf{X}_j \right)^{-1} \sum_j \mathbf{X}_j' \hat{\mathbf{V}}_j^{-1} \mathbf{y}_j \quad (14)$$

dengan galat baku adalah akar diagonal utama matriks

$$\text{var}(\hat{\beta}) = \left(\sum_j \mathbf{X}_j' \hat{\mathbf{V}}_j^{-1} \mathbf{X}_j \right)^{-1} \quad (15)$$

Prosedur penaksiran terus diiterasi hingga didapatkan nilai penaksir yang konvergen.

Penaksir yang didapatkan dari Persamaan 14 merupakan penaksir yang bias sehingga untuk mendapatkan penaksir yang tak bias perlu dilakukan suatu modifikasi dari prosedur penaksirannya. Menurut Verbyla, prosedur penaksiran kemungkinan maksimum akan menghasilkan penaksir tak bias apabila dilakukan modifikasi dalam fungsi *profile log-likelihood* yang disebut fungsi *Restricted log-likelihood* sebagai berikut

$$l_{REML}(\beta, \theta) = -0.5 n \cdot \ln 2\pi - 0.5 \ln |\mathbf{V}_j| - 0.5 \sum_j (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}_j \hat{\beta}_j)' \mathbf{V}_j^{-1} (\mathbf{y}_j - \mathbf{X}_j \hat{\beta}_j) - 0.5 \sum_j \ln |\mathbf{X}_j' \mathbf{V}_j^{-1} \mathbf{X}_j| \quad (16)$$

Melalui fungsi ini nilai taksiran \mathbf{V}_j dapat diperoleh dan selanjutnya nilai ini digunakan untuk menaksir koefisien regresi dan galat bakunya menggunakan Persamaan 14 dan Persamaan 15. Prosedur ini disebut sebagai *Restricted Maximum Likelihood* atau *Residual Maximum Likelihood* (ReML).

Galat Baku penaksir (*standard error*) merupakan salah satu ukuran untuk menentukan suatu penaksir dikatakan sebagai penaksir yang baik atau tidak. Galat baku dapat diperoleh dari akar positif varians sampling (*sampling variance*) suatu penaksir. Secara umum Persamaan 16 dapat dibentuk menjadi varians sampling sebagai berikut

$$\text{cov}(\hat{\beta}) = \left(\sum_j \mathbf{X}_j' \hat{\mathbf{V}}_j^{-1} \mathbf{X}_j \right)^{-1} \quad (17)$$

sehingga galat baku penaksir parameter β tersebut adalah akar positif diagonal utama matriks Persamaan 17. Sedangkan varians sampling untuk penaksir parameter acak θ adalah

$$\text{cov}(\hat{\theta}) = \left(\sum_j \mathbf{Z}_j' \hat{\mathbf{V}}_j^{-1} \mathbf{Z}_j \right)^{-1} \quad (18)$$

dan galat bakunya diperoleh dari akar positif diagonal utama matriks tersebut.

4. Contoh Kasus

Data yang digunakan adalah data sekunder yang dipublikasikan hasil survei RAND *Labor and Population* mengenai *Indonesia Family Life Survey*. Survei ini merupakan survei gelombang ketiga atau disebut IFLS-3. Dari survei terhadap keluarga (*Household Survey*) sebanyak 10.435 keluarga telah diwawancarai yang diambil dari 13 propinsi di Indonesia. Survei juga dilakukan terhadap lingkungan sosial beserta fasilitasnya (*Community-Facility Survey*) yaitu sebanyak 312 lingkungan sosial beserta fasilitasnya. (Strauss, et. al., 2004). Sebagai pendukung ditambahkan data hasil PODES Jawa Barat Tahun 2006. Data IFLS diukur pada tingkat rumah tangga sedangkan data PODES 2006 merupakan hasil sensus yang diukur pada tingkat desa yang kemudian disesuaikan pada tingkat kecamatan.

Berdasarkan hasil kajian ditentukan variabel-variabel yang terlibat dalam penelitian ini adalah sebagai berikut: sebagai variabel respon (Y) adalah Pendidikan Anak (Tahun), Variabel penjelas Level 1 adalah Jenis Kelamin Anak (1 = *Laki-laki*, 0 = *Perempuan*) (X_1), Pendidikan Ibu (Tahun) (X_2), Pendidikan Ayah (Tahun) (X_3), Status daerah (1 = *Rural*, 0 = *Urban*) (X_4), dan Variabel penjelas pada Level 2 adalah Banyak SMA di kecamatan (Z_1) dan Persentase petani di kecamatan (Z_2). (Ringdal, 1992),

Pembentukan model intersep acak yaitu dengan menambahkan variabel penjelas pada Level 1 yaitu umur (X_1), Pendidikan Ibu (X_2), Pendidikan Ayah (X_3), Wilayah (X_4) sehingga modelnya adalah sebagai berikut

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_1 X_{1ij} + \beta_2 X_{2ij} + \beta_3 X_{3ij} + \beta_4 X_{4ij} + e_{ij}$$

dengan $\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$

Metode penaksiran parameternya menggunakan REML. Hasil yang diperoleh adalah sebagai

berikut:

Tabel 1.
Taksiran Parameter Tetap Model Intersep Acak

Koefisien	penaksir	Galat Baku	DB	nilai-t	nilai-p
(Intersep)	5.102329	0.3876662	571	13.161656	0.0000
JK	0.612499	0.2299064	571	2.664125	0.0079
Ibu.pend	0.257277	0.0511590	571	5.028967	0.0000
Ayah.pend	0.205374	0.0410173	571	5.006994	0.0000
Wilayah	1.641170	0.4814545	571	3.408775	0.0007

Dari tabel diatas terlihat bahwa pada taraf $\alpha = 5\%$ semua variabel nyata. Artinya variabel jenis kelamin, pendidikan ibu, pendidikan ayah dan wilayah berpengaruh terhadap pendidikan anak.

Pembentukan model koefisien acak dengan menambahkan efek dari kecamatan ke dalam model yaitu kedalam koefisien Pendidikan Ayah (X_3). variabel-variabel yang diukur di tingkat kecamatan dimasukkan ke dalam model dengan melibatkan iteraksi antar variabel pada level yang berbeda. Untuk model ini variabel penjelas jumlah SMA (Z_1) dan persentase petani (Z_2) ditambahkan kedalam koefisien Pendidikan Ayah (X_3) sehingga modelnya adalah sebagai berikut

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_1 X_{1ij} + \beta_2 X_{2ij} + \beta_3 X_{3ij} + \beta_4 X_{4ij} + e_{ij}$$

dengan $\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01} Z_1 + \gamma_{02} Z_2 + u_{0j}$

$$\beta_{3j} = \gamma_{30} + \gamma_{31} Z_1 + \gamma_{32} Z_2 + u_{1j}$$

Metode penaksiran parameteranya menggunakan REML dan hasilnya sebagai berikut:

Tabel 2
Taksiran Parameter Tetap Model Koefisien Acak

Koefisien	penaksir	Galat Baku	DB	nilai-t	nilai-p
(Intersep)	6.205464	1.4754091	569	4.205927	0.0000
JK	0.647616	0.2219288	569	2.918125	0.0037
Ibu.pend	0.320581	0.0520463	569	6.159530	0.0000
Ayah.pend	0.132087	0.1937495	569	0.681741	0.4957
sma	0.101333	0.0476819	23	2.125180	0.0445
petani	-0.023030	0.0228446	569	-1.008132	0.3138
Ayah.pend x sma	-0.005023	0.0059294	569	-0.847157	0.3973
Ayah.pend x petani	0.002346	0.0030315	569	0.773868	0.4393

Dari tabel diatas jelas sekali terlihat semua variabel pada level 2 yaitu jumlah SMA dan persentase petani tidak nyata pada taraf 5% dan juga interaksi antar variabel level 1 dengan variabel level 2 tidak nyata pada taraf $\alpha = 5\%$. Artinya dapat dikatakan bahwa tidak terdapat interaksi antar variabel dari level yang berbeda. Selain itu koefisien pendidikan ayah juga tidak nyata pada taraf 5%.

Karena ada variabel yang tidak nyata, model koefisien acak diatas kemudian dimodifikasi dengan cara mengeliminasi variabel pada level 2 yang paling tidak nyata yaitu persentase petani. Selain itu juga tanpa menyertakan interaksi antar faktor pada level yang berbeda. Model yang terbentuk adalah sebagai berikut

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_1 X_{1ij} + \beta_2 X_{2ij} + \beta_3 X_{3ij} + e_{ij}$$

dengan $\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01} Z_1 + u_{0j}$

$$\beta_{3j} = \gamma_{03} + u_{1j}$$

Metode penaksiran parameternya menggunakan REML. Hasil yang diperoleh adalah sebagai berikut:

Tabel 3
Taksiran Parameter Tetap Model Koefisien Acak yang dimodifikasi

Koefisein	penaksir	Galat Baku	DB	nilai-t	nilai-p
(Intersep)	5.168886	0.4622307	596	11.182479	0.0000
JK	0.625407	0.2124107	596	2.944330	0.0034
Ibu.pend	0.311126	0.0492445	596	6.317983	0.0000
Ayah.pend	0.239219	0.0587959	596	4.068636	0.0001
SMA	0.065874	0.0232684	596	2.831054	0.0048

Dari tabel diatas terlihat bahwa pada taraf $\alpha = 5\%$ semua variabel nyata. Artinya variabel Level 1 jenis kelamin, pendidikan ibu, pendidikan ayah dan variabel pada level 2 banyak SMA berpengaruh terhadap pendidikan anak.

Dari hasil-hasil yang diperoleh pada bagian sebelumnya pertama kali akan dibahas mengenai ukuran kecocokan relatif untuk model-model tersebut. Setiap model akan dibandingkan dengan model sebelumnya. Ukuran yang digunakan adalah *deviance* dan metode pengujiannya menggunakan statistik khi-kuadrat seperti telah dijelaskan pada bagian sebelumnya. Untuk itu dapat dijelaskan melalui tabel dibawah ini

Tabel 4
Pengujian *Deviance* Setiap Model

Model	Deviance	parameter	Diff	db	Nilai-p
Model Non Hierarki	3220.168	5			
Model Intersep acak	3190.226	6	29.942	1	0.0000
Model koefisien acak yang dimodifikasi	3161.647	9	28.55	3	0.0000

Dari pengujian pada Tabel 4.12 terlihat bahwa Model Regresi jauh lebih buruk dibandingkan dengan model intersep acak, sedangkan model koefisien acak yang dimodifikasi lebih baik dibandingkan dengan model intersep acak. Sehingga dapat disimpulkan bahwa model koefisien acak yang dimodifikasi merupakan model yang terbaik untuk permasalahan ini.

Model yang terbentuk adalah model koefisien acak sebagai berikut:

$$y_{ij} = \beta_{0j} + 0.625407 X_{1ij} + 0.311126 X_{2ij} + \beta_3 X_{3ij} + e_{ij}$$

dengan $\beta_{0j} = 5.168886 + 0.065874 Z_1 + u_{0j}$

$$\beta_{3j} = 0.239219 + u_{1j}$$

dari model diatas terlihat bahwa meningkatnya jumlah SMA akan meningkatkan rata-rata pendidikan anak. Selain itu terlihat bahwa anak laki-laki lebih diutamakan memperoleh pendidikan

dibandingkan anak perempuan. Semakin tinggi pendidikan ibu maka akan semakin tinggi pula pendidikan anak. Begitu pula pendidikan ayah semakin tinggi akan meningkatkan pendidikan anak. Adanya keVariansan dalam kecamatan akan menentukan pada besar kecilnya pengaruh pendidikan ayah terhadap pendidikan anak.

Nilai koefisien korelasi *intra class* diperoleh dari penaksir Varians pada setiap level untuk model multilevel tanpa melibatkan variabel penjelas. Hasil yang diperoleh adalah sebagai berikut:

Tabel 5
Nilai Dugaan Parameter Acak Model tanpa variabel Penjelas

Parameter	Dugaan
$\sigma^2_{u_0}$ (level 1)	4.451666
$\sigma^2_{e_0}$ (level 2)	8.616717

Berdasarkan nilai taksiran parameter tersebut dapat diperoleh nilai koefisien korelasi *intra-class* menggunakan Persamaan 4.22 sebagai berikut

$$\rho = \frac{8.616717}{4.451666 + 8.616717} = 0.659356$$

Nilai ini mengandung arti bahwa proporsi Varians pada level kecamatan sebesar 65,9 %. Selain itu dapat dijelaskan pula bahwa korelasi antara dua anak dalam satu kecamatan sebesar 0.659356.

Untuk memperoleh nilai keVariansan yang dapat dijelaskan pada setiap level harus dihitung dahulu penaksir komponen acak untuk model yang ditetapkan yaitu model koefisien acak yang dimodifikasi. Hasil taksiran parameter acak untuk model tersebut adalah sebagai berikut

Tabel 6.
Taksiran Komponen Acak Model Koefisien Acak yang dimodifikasi

Komponen	Varians
Intersep (u_0)	3.81725620
Pendidikan Ayah (u_1)	0.05409512
Residual (e_0)	6.78144058

Hasil ini menyatakan bahwa Varians antar kecamatan sebesar 3.81725620 sedangkan Varians antar anak sebesar 6.78144058. Nilai Varians ini akan lebih berarti apabila dapat dicari nilai keVariansan yang dapat dijelaskan pada setiap level. Berdasarkan Persamaan 5.32 dan Persamaan 5.33 nilai keVariansan ini dapat diperoleh menggunakan taksiran pada Tabel 5.13 dan Tabel 5.14 yaitu sebagai berikut:

$$R_1^2 = 1 - \frac{6.78144058}{8.616717} = 0.2129902$$

$$R_2^2 = 1 - \frac{3.81725620}{4.451666} = 0.1425106$$

Dari hasil tersebut mengandung arti bahwa keVariansan yang dapat dijelaskan oleh variabel jenis kelamin, pendidikan ayah dan pendidikan ibu adalah sebesar 21.3 %. Sedangkan keVariansan yang dapat dijelaskan oleh struktur kecamatan sebesar 14.25%. Hasil ini menunjukkan bahwa meskipun keVariansan sebagian besar disebabkan oleh perbedaan individu akan tetapi perbedaan antar kecamatan juga mempunyai pengaruh yang cukup besar.

5. Simpulan

Data berstruktur hierarki seperti data hasil survei multistage sampling dapat dimodelkan menggunakan model linier hierarki atau model multilevel. Persoalan heterogenitas atau adanya keterkaitan antar variabel yang berbeda level yang muncul akibat pengukuran pada data hierarki dapat diatasi menggunakan model multilevel. Metode penaksiran yang dapat digunakan adalah metode GLS, akan tetapi metode ini menghasilkan penaksir yang bias terutama pada ukuran sampel kecil sehingga metode *Restricted Maximum Likelihood* lebih tepat untuk digunakan untuk memperoleh penaksir yang terbaik.

Pada contoh kasus mengenai faktor faktor-faktor yang mempengaruhi pendidikan anak, penaksiran menggunakan ReML diperoleh bahwa variabel jenis kelamin, pendidikan ibu, pendidikan ayah dan status wilayah (*Rural/urban*) merupakan variabel yang signifikan. Sedangkan faktor yang berpengaruh pada tingkat kecamatan adalah banyak SMA. Interaksi antara faktor pendidikan ayah dengan banyak SMA dan interaksi antara faktor pendidikan ayah dengan persentase petani tidak berpengaruh nyata terhadap pendidikan anak. Hasil keVariansan yang dapat dijelaskan oleh variabel jenis kelamin, pendidikan ayah dan pendidikan ibu adalah sebesar 21.3 %. Sedangkan keVariansan yang dapat dijelaskan oleh struktur kecamatan sebesar 14.25%. Hasil ini menunjukkan bahwa meskipun keVariansan sebagian besar disebabkan oleh perbedaan individu akan tetapi perbedaan antar kecamatan juga mempunyai pengaruh yang cukup besar.

6. Daftar Pustaka

- Goldstein (1995) *Multilevel Statistical Models 2nd Ed.*, E-Book of Arnold, London.
- Hox, J.J. (2002) *Multilevel Analysis: Techniques and Applications*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Mahwah, New Jersey, London
- Hox, J.J. And Kreft, Ita G.G. (1994) Multilevel Analysis Methods. *Sociological Methods & Research*, Vol 22, No. 3, pp. 283-299.
- Jones, Steenbergen (1997) *Modelling Multilevel Data Structures*. Paper prepared in 14th annual meeting of the political methodology society, Columbus, OH.
- Longford, N.T. (1999), *Random Coefficient Models*, Oxford: Clarendon.
- Ringdal (1992) Methods for Multilevel Analysis. *Acta Sociologica*, Vol 35, pp. 235-243. Sage Publications.
- Snijder, Tom A. B., Bosker, Roel J. (1999). *Multilevel Analysis: An introduction to basic and advance multilevel modelling*. SAGE Publications, London.
- Strauss, J., K. Beegle, B. Sikoki, A. Dwiyanto, Y. Herawati and F. Witoelar. (2004) *The Third Wave of Indonesia Family Life Survey: Overview and Field Report Volume I*. Rand Labor and Population
- West, B.T., Welch, K.B., Galechi, A.T. 2007. *Linear Mixed Models: A Practical Guide Using Statistical Software*. Boca Raton. Chapman & Hall.