

**REGRESI RIDGE-MM UNTUK MENGATASI MULTIKOLINIERITAS
DAN PENCILAN : STUDI KASUS PADA DATA INDEKS
PEMBANGUNAN MANUSIA**

Sudartianto

Departemen Statistika FMIPA UNPAD
sudartianto@unpad.ac.id

Gumgum Darmawan

Departemen Statistika FMIPA UNPAD

Nono Suwarno

Fakultas Peternakan UNPAD

ABSTRACT. *Parameter estimation in the regression analysis using OLS method is not efficient when there multikolinearity, in variable predictor, as the alternative is used regression ridge, however, when in the data are outliers then regression ridge will produce adjuster inefficient as well, therefore it is applied MM-estimator is also a method for generating a robust estimator for the presence of data outliers so the method is often also called the method of MM-ridge regression, then this method is used to analyze the Human Development Index data.*

Keywords: *Multicollinearity, Outliers, Ridge Regression, Robust Regression*

ABSTRAK. Penaksiran parameter dalam analisis regresi dengan menggunakan metode OLS tidaklah efisien apabila terdapat multikolinieritas, dalam peubah prediktornya, sebagai alternatifnya digunakanlah regresi ridge, akan tetapi, apabila di dalam datanya terdapat pencilan maka metode regresi ridge akan menghasilkan penaksir yang tidak efisien juga, oleh sebab itu diterapkan juga metode MM-estimator untuk menghasilkan penaksir yang robust terhadap adanya data pencilan sehingga metode ini sering juga disebut metode regresi ridge-MM, kemudian metode ini digunakan untuk menganalisis data Indeks Pembangunan Manusia.

Kata Kunci : Multikolinieritas, Pencilan, Regresi Ridge, Regressi Robus.

1. PENDAHULUAN

Analisis regresi merupakan analisis yang mempelajari cara membangun sebuah model fungsional dari data, yang digunakan untuk menggambarkan hubungan antara suatu variabel tak bebas dengan satu atau lebih variabel bebas.

Dalam membangun sebuah model regresi linier yang baik atau cocok ada beberapa asumsi model regresi linier klasik yang harus dipenuhi, yaitu nilai yang diharapkan dari gangguan ($\mathcal{E}$) adalah nol, non-autokorelasi, homoskedastisitas, variabel bebas bersifat non-stokastik, non-multikolinieritas, dan gangguan ($\mathcal{E}$) mengikuti distribusi normal (Montgomery, D. C. dan Elizabeth A. P. [1992], dan Sen, A. dan Muni S. [1990]).

Salah satu pelanggaran asumsi model regresi linier klasik adalah adanya multikolinieritas. Pelanggaran asumsi ini disebabkan karena adanya hubungan linier sempurna atau hampir sempurna diantara variabel-variabel bebas dalam satu model regresi. Multikolinieritas sempurna dapat mengakibatkan taksiran parameter regresi dengan menggunakan metode kuadrat terkecil biasa tidak dapat ditentukan dan variansnya tidak terdefinisi. Sedangkan, multikolinieritas hampir sempurna dapat mengakibatkan penaksiran parameter regresi dengan menggunakan metode kuadrat terkecil biasa masih dapat ditentukan, tetapi variansnya semakin membesar seiring dengan meningkatnya multikolinieritas.

Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menanggulangi adanya multikolinieritas adalah metode regresi ridge (Soemartini,[2010] dan [2012]). Akan tetapi, permasalahan yang ada menjadi lebih rumit ketika pencilan dan multikolinieritas terdapat pada data yang sama. Metode regresi *ridge* akan menjadi tidak *robust* ketika terdapat data pencilan. Data pencilan yang timbul terlalu berpengaruh terhadap penaksiran yang dilakukan dengan menggunakan metode kuadrat terkecil biasa dan regresi *ridge*. Oleh karena itu, diperlukan suatu metode yang dapat menangani adanya pengaruh dari data pencilan dan multikolinieritas, metode tersebut tidak lain adalah metode regresi ridge-MM. Metode ini merupakan modifikasi dari metode regresi ridge dengan menerapkan estimator MM yang robust terhadap adanya data pencilan.

Penelitian ini bertujuan untuk menerapkan metode regresi ridge-MM yaitu metode regresi robust yang paling tepat untuk digunakan dan dikombinasikan dengan metode regresi ridge sehingga dapat digunakan untuk menanggulangi

adanya pelanggaran asumsi klasik dengan adanya multikolinieritas dan adanya pencilan dalam data khususnya untuk data Indeks Pembangunan Manusia (IPM).

2. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam analisis regresi ganda, metode kuadrat terkecil biasa adalah suatu metode yang sangat populer yang menghasilkan sifat-sifat yang optimal dan mudah perhitungannya. Penaksir β dicari dengan meminimumkan fungsi

$$\sum_{i=1}^n (y_i - x_i' \beta)^2 = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 \quad (1)$$

dan estimator dari parameter β dinyatakan oleh

$$\hat{\beta}_{OLS} = (X'X)^{-1} X'Y \quad (2)$$

Metoda ini menghasilkan penaksir yang takbias dan bervariansi minimum di antara semua penaksir linier takbias asalkan kekeliruannya berdistribusi bebas, normal dan identik. Akan tetapi dengan adanya multikolinieritas maka penaksirnya masih tetap takbias, hanya sudah tidak efisien lagi, karena variansinya sangat besar. Besarnya nilai variansi yang disebabkan multikolinieritas akan sangat membahayakan penggunaan regresi sebagai dasar untuk pengujian hipotesis, penaksiran dan peramalan. Sebagai alternatif dari penggunaan OLS kita bisa menggunakan metode regresi ridge karena dengan metode ini bisa memperbaiki presisi dari koefisien regresi. Metode regresi ridge pertama kali dikemukakan oleh Hoerl[1962] dan kemudian diperluas lebih lanjut oleh Hoerl dan Kennard[1970a]. Penaksir koefisien regresi ridge dinyatakan sebagai

$$\hat{\beta}_{RIDGE} = (X'X + kI)^{-1} X'Y \quad (3)$$

dimana I adalah matriks identitas ($p \times p$) dan k konstanta. Secara praktis nilai optimal dari k tidak diketahui. Berbagai metode dalam menentukan k sudah muncul dalam banyak literatur seperti yang dikemukakan oleh Hoerl dan Kennard [1970b] dan Gibbons [1981]. Penaksir k dikemukakan oleh Hoerl *et al* [1975] diberikan oleh

$$k_{HKB} = \frac{ps_{OLS}^2}{\hat{\beta}_{OLS}^T \hat{\beta}_{OLS}} \quad (4)$$

dimana

$$s_{OLS}^2 = \frac{(Y - X\hat{\beta}_{OLS})' (Y - X\hat{\beta}_{OLS})}{n-p}. \quad (5)$$

Bila $k = 0$, $\hat{\beta}_{RIDGE} = \hat{\beta}_{OLS}$, bila $k > 0$, $\hat{\beta}_{RIDGE}$ adalah penaksir yang bias akan tetapi lebih stabil dan lebih tepat dari pada penaksir OLS dan bila $k \rightarrow \infty$, $\hat{\beta}_{RIDGE} \rightarrow 0$. Hoerl dan Kennard [1970a] sudah menunjukkan bahwa nilai k akan selalu ada untuk $k > 0$ di mana $MSE_{\hat{\beta}_{RIDGE}}$ lebih kecil dari pada $MSE_{\hat{\beta}_{OLS}}$.

3. METODE PENELITIAN

3.1 Data

Data yang akan dianalisis disini adalah data sekunder mengenai data pengukuran komponen indikator Indeks Pembangunan Manusia (IPM), yang meliputi Angka Harapan Hidup (AHH), Angka Melek Huruf (AMH), dan Rata-rata Lama Sekolah (RLS). Data diambil secara acak sederhana sebanyak 30 Kabupaten/ Kota di Indonesia. Data ini sepenuhnya menggunakan konsep dan definisi dari variabel pengamatan yang dipakai oleh BPS.

3.2 Penaksiran Parameter Regresi dengan Metode MM-Estimator

MM-estimator pertama kali diperkenalkan oleh Yohai [1985]. MM-estimator merupakan metode penaksir *robust* yang dapat mencapai nilai maksimum *breakdown* dan efisiensi yang tinggi metode ini merupakan metode yang terbaik dibandingkan dengan metode Least Absolute values (LAV), Least Median Squares (LMS), Least Trimmed Squares (LTS) dan penaksir-M menurut (Midi dan Zahari [2007]) dan Alguraibawi, M., Midi, H., and Rana S. [2015]). Langkah-langkah penaksiran parameter regresi dengan metode MM-estimator dijelaskan pada bagian selanjutnya.

3.2.1 Penaksiran Parameter Regresi Awal dengan Metode *Least Trimmed*

Square

Least trimmed square merupakan metode yang dikembangkan oleh Rousseeuw dan Leroy [1987]. Prosedur dari metode ini adalah meminimumkan $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$ dari $\binom{n}{h}$ kombinasi data dengan tiap kombinasi terdiri dari h pengamatan. Langkah-langkah dalam melakukan penaksiran parameter regresi dengan metode *least trimmed square* adalah sebagai berikut :

- Tentukan nilai h dengan menggunakan rumus $h = \left\lceil \frac{3n + p + 1}{4} \right\rceil$
- Buat subset data sebanyak $\binom{n}{h}$
- Hitung nilai taksiran koefisien regresi dari tiap subset yang terbentuk dengan menggunakan metode kuadrat terkecil biasa.
- Hitung jumlah kuadrat residu dari masing-masing subset.
- Taksir model regresi dengan jumlah kuadrat residu terkecil adalah yang cocok dengan data.

3.2.2 Penaksiran Parameter Regresi dengan Metode *M-estimator*

M-estimator pertama kali diperkenalkan oleh Huber [1964]. Prosedur dari *M-estimator* adalah meminimumkan fungsi residual, yaitu $\min \sum_{i=1}^n \rho(r_i)$. Langkah-langkah dalam melakukan penaksiran parameter regresi dengan metode *M-estimator* adalah sebagai berikut :

- Hitung nilai taksiran skala residual *M-estimator* dengan menggunakan rumus :

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{0.6745} \text{median} \left| r_i(\hat{\beta}_{LTS}) - \text{median} \left(r_i(\hat{\beta}_{LTS}) \right) \right| \quad \dots \quad (6)$$

$$\text{dengan } r_i(\hat{\beta}_{LTS}) = Y_i - \mathbf{X}_i' \hat{\beta}_{LTS} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

- Hitung nilai elemen-elemen w_{ii} pada matriks diagonal bobot $\mathbf{W}$ dengan menggunakan rumus sebagai berikut :

$$w_{ii} = \begin{cases} \frac{\psi[(Y_i - \mathbf{X}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{LTS}}) / \hat{\sigma}]}{(Y_i - \mathbf{X}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{LTS}}) / \hat{\sigma}} & ; \text{ if } Y_i \neq \mathbf{X}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{LTS}} \\ 1 & ; \text{ if } Y_i = \mathbf{X}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{LTS}} \end{cases} \quad \dots (7)$$

dengan ψ adalah fungsi pengaruh. Fungsi ψ yang akan digunakan adalah tipe fungsi ψ bisquare sebagai berikut :

$$\psi(z) = \begin{cases} z(1 - (z/c)^2)^2 & ; |z| \leq c \\ 0 & ; |z| > c \end{cases} \quad \dots (8)$$

dengan $z = (Y_i - \mathbf{X}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{LTS}}) / \hat{\sigma}$; $c = 4.685 \hat{\sigma}$. c adalah konstanta *tunning*. $\hat{\sigma}$ adalah taksiran skala residu *M-estimator*.

- Taksiran Parameter Regresi MM-*estimator* dapat diperoleh dengan menggunakan rumus :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MM}} = (\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{y} \quad \dots (9)$$

- Hitung varians residu MM-*estimator* dengan menggunakan rumus :

$$\hat{\sigma}_{\text{MM}}^2 = \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MM}})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MM}})}{n - (p+1)} \quad \dots (10)$$

dengan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{MM}}$ adalah taksiran parameter regresi dengan menggunakan metode MM-*estimator* dan $(p+1)$ adalah banyaknya parameter regresi.

3.3 Regresi Ridge-MM

Pada metode regresi ridge-MM prosedur perhitungan yang harus dilakukan tidak jauh berbeda dengan prosedur perhitungan yang dilakukan dengan menggunakan regresi ridge biasa. Perbedaan prosedur perhitungan antara ridge-MM dengan regresi ridge hanya terletak pada rumus dalam menentukan nilai tetapan k . Langkah-langkah dalam melakukan penaksiran parameter regresi dengan regresi ridge-MM adalah sebagai berikut :

- Penentuan nilai tetapan k pada regresi ridge-MM adalah dengan menggunakan rumus :

$$k = \frac{(p+1)\hat{\sigma}_{MM}^2}{\hat{\beta}_{MM}'\hat{\beta}_{MM}} \quad \dots \quad (11)$$

dengan $(p+1)$ adalah banyaknya parameter regresi.

- Penaksir regresi ridge-MM dinyatakan sebagai berikut :

$$\hat{\beta}_{RMM} = (X'X + kI)^{-1} X'y \quad \dots \quad (12)$$

dengan k adalah konstanta positif.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Penaksiran Parameter Regresi dengan Metode Kuadrat Terkecil Biasa untuk Data yang sudah distandarisasi

Pada tahap awal ini digunakan persamaan (2) sehingga diperoleh nilai penaksir $\hat{\beta}$, sebagai berikut :

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 0.2151 \\ 0.6965 \\ 0.1373 \end{bmatrix}$$

sehingga model regresi taksirannya adalah sebagai berikut :

$$\hat{Y}^* = 0.2151X_1^* + 0.6965 X_2^* + 0.1373X_3^* \quad \dots \quad (13)$$

Dengan mentransformasikan kembali pada setiap variabel asal, maka diperoleh taksiran model regresi metode kuadrat terkecil biasa adalah sebagai berikut:

$$\hat{Y} = -7.94 + 0.6943 X_1 + 0.2995 X_2 + 0.4813 X_3 \quad \dots \quad (14)$$

Berdasarkan taksiran model regresi linier berganda (14) dapat diperoleh nilai residu r_i dengan $r_i = Y_i - \hat{Y}_i$ adalah sebagai berikut :

Tabel 1. Nilai Residu
Metode Kuadrat Terkecil Biasa

No	r_i	No	r_i
1	-0.2599	16	-0.0550
2	-0.0347	17	0.0434
3	-0.0348	18	0.0881
4	0.1168	19	-0.0803
5	-0.0205	20	0.0399
6	-0.0645	21	0.0594
7	-0.0304	22	-0.0458
8	0.0016	23	0.0073
9	0.1091	24	0.0739
10	-0.0608	25	0.0788
11	0.0837	26	0.0554
12	-0.0136	27	-0.0414
13	0.0647	28	-0.0547
14	-0.0549	29	-0.0621
15	0.0907	30	0.0007

Berdasarkan hasil penaksiran model regresi dengan menggunakan metode kuadrat terkecil biasa diatas dapat diperoleh nilai residu seperti pada Tabel 1 di atas. Nilai residu ini selanjutnya akan digunakan untuk melakukan proses pengidentifikasian terhadap pencilan dan multikolinieritas.

4.2 Pengidentifikasian Pencilan dan Multikolinieritas

4.2.1 Pencilan

Pendeteksian pencilan dilakukan dengan menghitung nilai *Internal Studentized Residual*, *Deleted Studentized Residual*, *Leverage*, *Cook's Distance*, dan *DFIT* sehingga diperoleh hasil sebagai berikut :

Tabel 2. Nilai SRES, TRES, HI, COOK, dan DFIT

No	SRES	TRES	HI	COOK	DFIT
1	-3.24412	-4.12328	0.057271	0.159840	-1.01629
2	-0.45484	-0.44780	0.143656	0.008676	-0.18341
3	-0.45874	-0.45167	0.154819	0.009637	-0.19331
4	1.53496	1.57837	0.149227	0.103316	0.66104
5	-0.27113	-0.26624	0.162863	0.003575	-0.11743
6	-0.87327	-0.86915	0.198669	0.047267	-0.43277
7	-0.40447	-0.39787	0.171594	0.008472	-0.18108
8	0.02292	0.02247	0.327058	0.000064	0.01567
9	1.56899	1.61697	0.289935	0.251294	1.03325
10	-0.82610	-0.82090	0.203714	0.043647	-0.41521
11	1.09861	1.10318	0.147701	0.052290	0.45924
12	-0.18615	-0.18265	0.215786	0.002384	-0.09581
13	0.80852	0.80298	0.060599	0.010542	0.20394
14	-0.73335	-0.72667	0.175487	0.028616	-0.33524
15	1.15347	1.16117	0.092078	0.033734	0.36979
16	-0.69873	-0.69168	0.089601	0.012013	-0.21699
17	0.60099	0.59346	0.234044	0.027592	0.32805
18	1.09577	1.10020	0.050082	0.015826	0.25262

19	-1.00045	-1.00047	0.052754	0.013936	-0.23610
20	0.50166	0.49431	0.069911	0.004729	0.13552
21	0.75211	0.74566	0.083766	0.012929	0.22546
22	-0.58123	-0.57368	0.089706	0.008323	-0.18009
23	0.09206	0.09029	0.069985	0.000159	0.02477
24	0.93769	0.93544	0.088782	0.021417	0.29199
25	1.01815	1.01889	0.120679	0.035567	0.37746
26	0.69159	0.68448	0.058350	0.007409	0.17039
27	-0.51874	-0.51132	0.064162	0.004612	-0.13389
28	-0.68784	-0.68070	0.072430	0.009236	-0.19021
29	-0.78389	-0.77792	0.078689	0.013121	-0.22735
30	0.01011	0.00991	0.226604	0.000007	0.00536

Telah dijelaskan bahwa suatu pengamatan dikatakan pencilan jika memenuhi beberapa ketentuan, yaitu sebagai berikut :

- $SRES \geq 2$ atau $SRES < -2$
- $TRES \geq t_{(\alpha/2; n-(p+1)-1)}$ atau $TRES < -t_{(\alpha/2; n-(p+1)-1)}$; dengan $t_{(0.025; 25)} = 2.06$
- $HI > (2(p+1)-1)/n$; dengan $(2(p+1)-1)/n = 0.2333$
- $COOK > F_{(\alpha; (p+1), n-(p+1))}$; dengan $F_{(0.05; 4, 26)} = 2.74$
- $DFIT > 2\sqrt{\frac{p+1}{n}}$; dengan $2\sqrt{\frac{p+1}{n}} = 0.7303$

Berdasarkan hasil perhitungan diatas dapat dilihat bahwa terdapat beberapa pengamatan yang dideteksi sebagai pencilan, yaitu pengamatan ke-1, 8, 9, dan 17. Pengamatan ke-1 dideteksi sebagai *outlier*, yaitu pengamatan yang memiliki *studentized* residual yang besar pada sekumpulan data. Pengamatan ke-8, 9, dan 17 dideteksi sebagai *leverage value*, yaitu pengamatan yang memiliki nilai-nilai

X_i dan Y_i yang agak jauh dari data yang lain. Selain itu, pengamatan ke-9 juga dideteksi sebagai pengamatan berpengaruh, yaitu pengamatan yang mempengaruhi model regresi. Pengamatan berpengaruh dapat membuat model regresi dengan metode kuadrat terkecil biasa menyimpang dari pola sebagian besar data.

4.2.2 Multikolinieritas

Multikolinieritas dideteksi dengan menghitung nilai eigen diperoleh hasil sebagai berikut :

Tabel 3. Nilai Eigen dari Matriks $X'X$

	Nilai Eigen
λ_1	2.6633
λ_2	0.3159
λ_3	0.0208

Berdasarkan hasil perhitungan nilai eigen diatas didapat nilai bilangan kondisi sebesar 128.1665. Oleh karena itu, dapat diketahui bahwa terdapat pelanggaran asumsi regresi linier klasik, yakni multikolinearitas. Ini artinya bahwa terdapat hubungan linier di antara variabel bebas. Dengan adanya pelanggaran asumsi model regresi linier klasik, yaitu multikolinearitas yang diikuti adanya pencilan, maka penaksiran parameter regresi tidak dapat dilakukan dengan metode kuadrat terkecil biasa ataupun metode regresi *ridge* karena taksiran model yang diperoleh akan terpengaruhi oleh adanya pencilan. Oleh karena itu, penaksiran parameter regresi dilakukan dengan metode *ridge*-MM.

4.3 Penaksiran Parameter Regresi dengan Metode MM-estimator

Penaksiran parameter regresi dengan metode MM-estimator dilakukan dengan beberapa langkah yang dijelaskan oleh bagian selanjutnya.

4.3.1 Penaksiran Parameter Regresi Awal dengan Metode *Least Trimmed Square*

Dengan menggunakan *software* R diperoleh taksiran parameter regresi awal dengan nilai jumlah kuadrat residu sebesar 0.1222 adalah sebagai berikut :

$$\hat{\beta}_{LTS} = \begin{bmatrix} 0.1957 \\ 0.6518 \\ 0.2180 \end{bmatrix}$$

4.3.2 Penaksiran Parameter Regresi dengan Metode *M-Estimator*

Langkah pertama yang harus dilakukan adalah menghitung taksiran skala residual untuk *M-estimator*. Dengan menggunakan persamaan (6) diperoleh nilai taksiran skala residual untuk *M-estimator* adalah sebesar 0.0678. Kemudian dilakukan penaksiran parameter regresi dengan menggunakan persamaan (9) dengan matriks diagonal **W** pada persamaan (7) dan (8) sehingga diperoleh nilai elemen-elemennya (w_{ii}) adalah sebagai berikut :

Tabel 4. Nilai Elemen-elemen Matriks Diagonal **W**

No	w_{ii}	No	w_{ii}
1	0.0000	16	0.0000
2	0.9988	17	0.0000
3	0.9999	18	0.0000
4	0.0000	19	0.0000
5	0.9784	20	0.0000
6	0.2751	21	0.0000
7	0.6348	22	0.0000

8	0.9991	23	0.3430
9	0.0000	24	0.0000
10	0.0000	25	0.0000
11	0.0000	26	0.0000
12	0.7439	27	0.0000
13	0.0000	28	0.0000
14	0.0000	29	0.0000
15	0.0000	30	0.0000

Berdasarkan hasil perhitungan diatas dapat diperoleh nilai taksiran parameter regresi *MM-estimator* dengan menggunakan *software* adalah sebagai berikut :

$$\hat{\beta}_{MM} = \begin{bmatrix} 0.1986 \\ 0.6535 \\ 0.2150 \end{bmatrix}$$

Selain itu, dapat diperoleh juga nilai varians residu *MM-estimator* dengan yaitu sebesar 0.0075.

4.3.3 Penaksiran Parameter Regresi dengan Metode *Ridge-MM*

Pada tahap ini hal pertama yang harus ditentukan adalah besarnya nilai k . Dengan menggunakan persamaan (11) diperoleh besarnya nilai k sebesar 0.0585. Berdasarkan nilai $k = 0.0585$ dapat diperoleh nilai $\hat{\beta}_{RMM}$ dengan menggunakan persamaan (12), yaitu sebagai berikut :

$$\hat{\beta}_{RMM} = \begin{bmatrix} 0.2093 \\ 0.6763 \\ 0.1612 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh taksiran model regresi *ridge*-MM adalah sebagai berikut :

$$\hat{Y}^* = 0.2093X_1^* + 0.6763X_2^* + 0.1612X_3^* \quad \dots \quad (15)$$

Dengan mentransformasikan kembali pada setiap variabel asal, maka diperoleh taksiran model regresi *ridge*-MM adalah sebagai berikut:

$$\hat{Y} = -1.8432 + 0.6755X_1 + 0.2908X_2 + 0.5651X_3 \quad (16)$$

Persamaan tersebut dapat diartikan sebagai berikut:

1. Rata-rata indeks pembangunan manusia akan berkurang 1.8432 apabila angka harapan hidup, angka melek huruf, dan rata-rata lama sekolah bernilai nol.
2. Jika setiap angka harapan hidup bertambah 1 tahun dengan menganggap angka melek huruf dan rata-rata lama sekolah bernilai konstan, maka indeks pembangunan manusia akan meningkat sebesar 0.6755.
3. Jika setiap angka melek huruf bertambah 1 % dengan menganggap angka harapan hidup dan rata-rata lama sekolah bernilai konstan, maka indeks pembangunan manusia akan meningkat sebesar 0.2908.
4. Jika setiap rata-rata lama sekolah bertambah 1 tahun dengan menganggap angka harapan hidup dan angka melek huruf bernilai konstan, maka indeks pembangunan manusia akan meningkat sebesar 0.5651.

Berdasarkan hasil taksiran model regresi persamaan (16) dapat diperoleh nilai koefisien determinasi sebesar 99.28%, artinya bahwa sebanyak 99,28% variabel indeks pembangunan manusia dapat dijelaskan oleh variabel angka harapan hidup, angka melek huruf, dan rata-rata lama sekolah. Sedangkan sisanya sebesar 0.72% dijelaskan oleh variabel lain.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan yang telah dilakukan dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Setelah dilakukan pendeteksian terhadap pencilan dan multikolinieritas pada data ternyata terdapat multikolinieritas yang diikuti adanya pencilan sehingga metode penaksiran parameter regresi yang digunakan adalah metode *ridge*-MM.

2. Metode *ridge*-MM digunakan untuk mengatasi adanya multikolinieritas tidak sempurna dan pencilan yang merupakan pengamatan berpengaruh.

3. Model taksiran regresi *ridge*-MM yang diperoleh adalah sebagai berikut :

$$\hat{Y} = -1.8432 + 0.6755X_1 + 0.2908X_2 + 0.5651X_3 .$$

DAFTAR PUSTAKA

- Alguraibawi, M., Midi, H., and Rana, S., *Robust Jackknife Ridge Regression to Combat Multikolinearity and High Leverage Points in Multiple Linear Regression*, Economic Computation and Economic Cybernatics Studies and Research, 4 (2015).
- Gibbons, D., *A Simulation Study of Some Ridge Estimators*, Journal of American Statistical Association, 76 (1981), 131-139.
- Hoerl, A. E., *Application of Ridge Analysis to Regression Problems*, Chemical Engineering Progress, 58 (1962), 54-59.
- Hoerl, A. E. dan Kennard, R. W., *Ridge Regression: Iterative Estimation of the Biasing Parameter*, Communications in Statistics: A. Theory Methods, 5 (1970a), 77-88.
- Hoerl, A. E. dan Kennard, R. W., *Ridge Regression: Applications to Nonorthogonal Problems*, Technometrics, 12 (1970b), 69-82.
- Hoerl, A. E. dan Baldwin, K. F., *Ridge Regression: Some Simulations*, Communications in Statistics, 4 (1975), 104-123.
- Hoerl, A. E., Kennard, R. W., dan Baldwin, K. F., *Ridge Regression: Some Simulation*, Commun. Stat., 4 (1975), 104-123.
- Huber, P. J., *Robust Regression : Asymptotics, Conjectures and Monte Carlo*, The Annals of Statistics, 1 (1973), 799-821.
- Rousseeuw, P. J. dan Leroy, A. M., *Robust Regression and Outlier Detection*, John Wiley Sons, New York, 1987.
- Yohai, V. J., *High Breakdown-Point and High Efficiency Robust Estimates for Regression*, The Annals of Statistics, 15(20) (1985), 642-656.

- Midi, Habshah, dan Zahari, M., *A Simulation Study on Ridge Regression Estimators in The Presence of Outliers and Multicollinearity*, Jurnal Teknologi, Universiti Teknologi Malaysia, 47(C) (2007), 59-74.
- Montgomery, D. C. dan Elizabeth A. P., *Introduction to Linear Regression Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., Canada, 1992.
- Sen, A. dan Muni, S., *Regression Analysis : Theory, Method, and Applications*. Springer-Verlag. New York, 1990.
- Soemartini, *Pencilan (Outlier)*, Universitas Padjadjaran, 2010.
- Soemartini, *Penyelesaian Multikolinieritas melalui Metode Ridge Regression*. Universitas Padjadjaran, 2012.